

Leçon 11.1

Systemes Continus

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Systèmes continus
- 2^{eme} ordre – cordes, barres
- Séparation de variables
- 4^{eme} ordre - poutres

Chapitre 15: Systèmes Continus

2^{ème} Ordre

EPFL Systèmes continus – 2ème ordre

Caractéristiques des *systèmes vibratoires continus* du deuxième ordre

- leurs masses sont réparties et déformables;
- leurs éléments élastiques et dissipatifs sont continus et généralement liés aux propriétés constitutives des masses;
- ils possèdent un nombre infini de degrés de liberté et, par conséquent, de fréquences propres;
- l'étude analytique de leur comportement vibratoire n'est possible que pour des configurations très simples;
- l'analyse des systèmes de la pratique requiert le recours à des méthodes numériques de résolution.

Equation différentielle régissant le comportement vibratoire de *systèmes continus simples* du deuxième ordre – Equation d'onde de *d'Alembert*

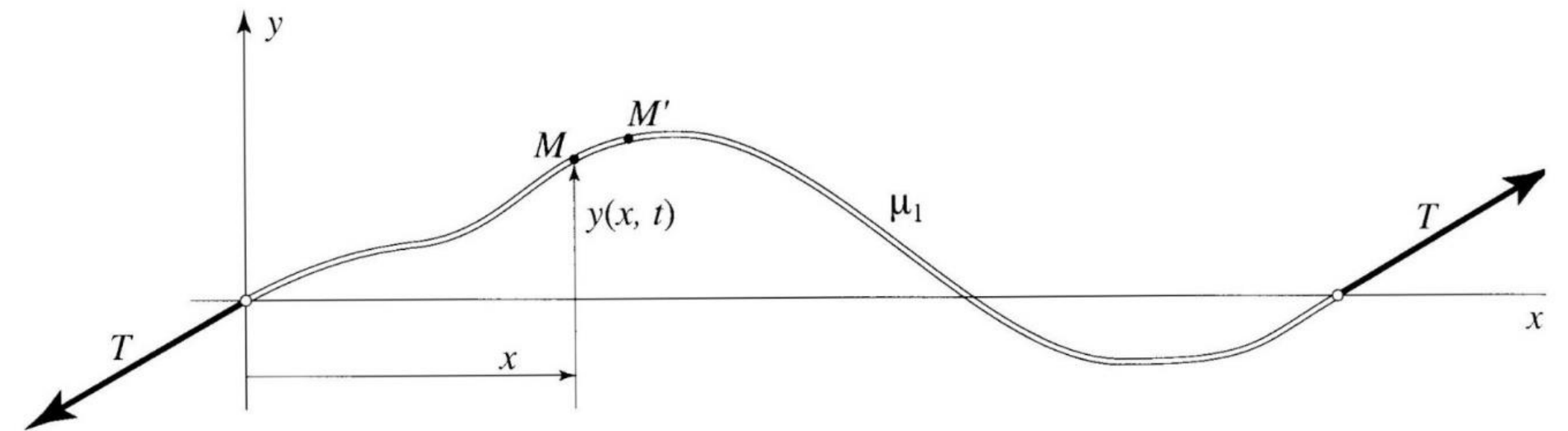
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$y(x, t)$	fonction vibratoire
x	variable géométrique [m]
t	temps [s]
a	célérité de l'onde [m s]

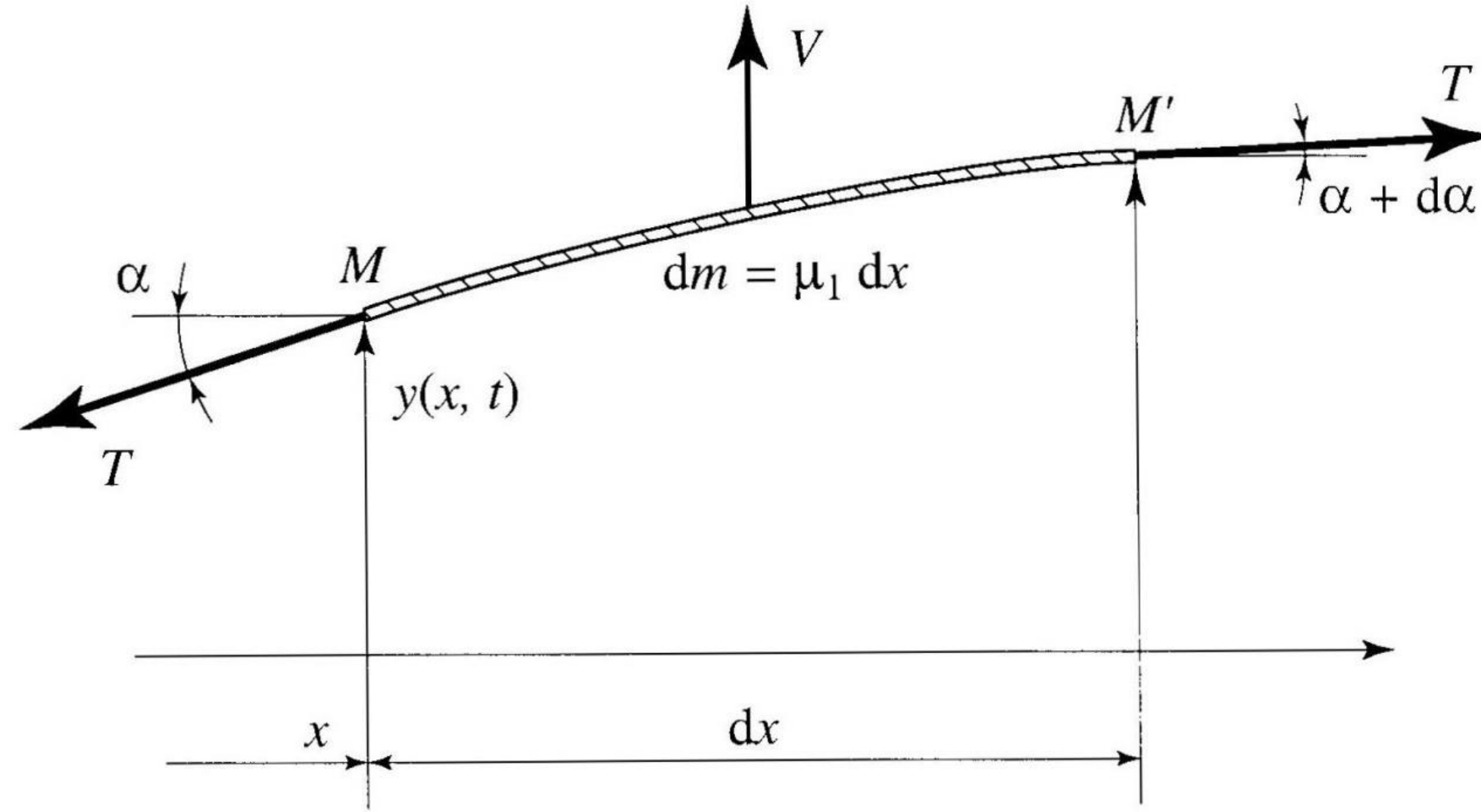
EPFL i. Vibrations latérales des cordes

Hypothèses adoptées pour l'étude des vibrations latérales des cordes

- la masse de la corde par unité de longueur μ_1 est constante et concentrée sur la ligne moyenne $y(x, t)$;
- les déplacements latéraux sont suffisamment petits pour que la tension T reste, au premier ordre, constante;
- les déplacements se produisent dans un plan.



EPFL I. Vibrations latérales des cordes



Ecriture de la *loi de Newton* – Equilibre d'un élément dm de corde par projection verticale des forces

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(\alpha + d\alpha) - T \alpha$$

$$\mu_1 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

T tension dans la corde

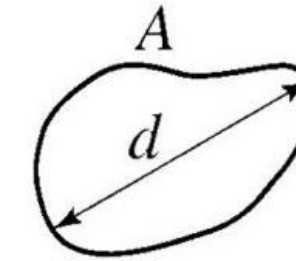
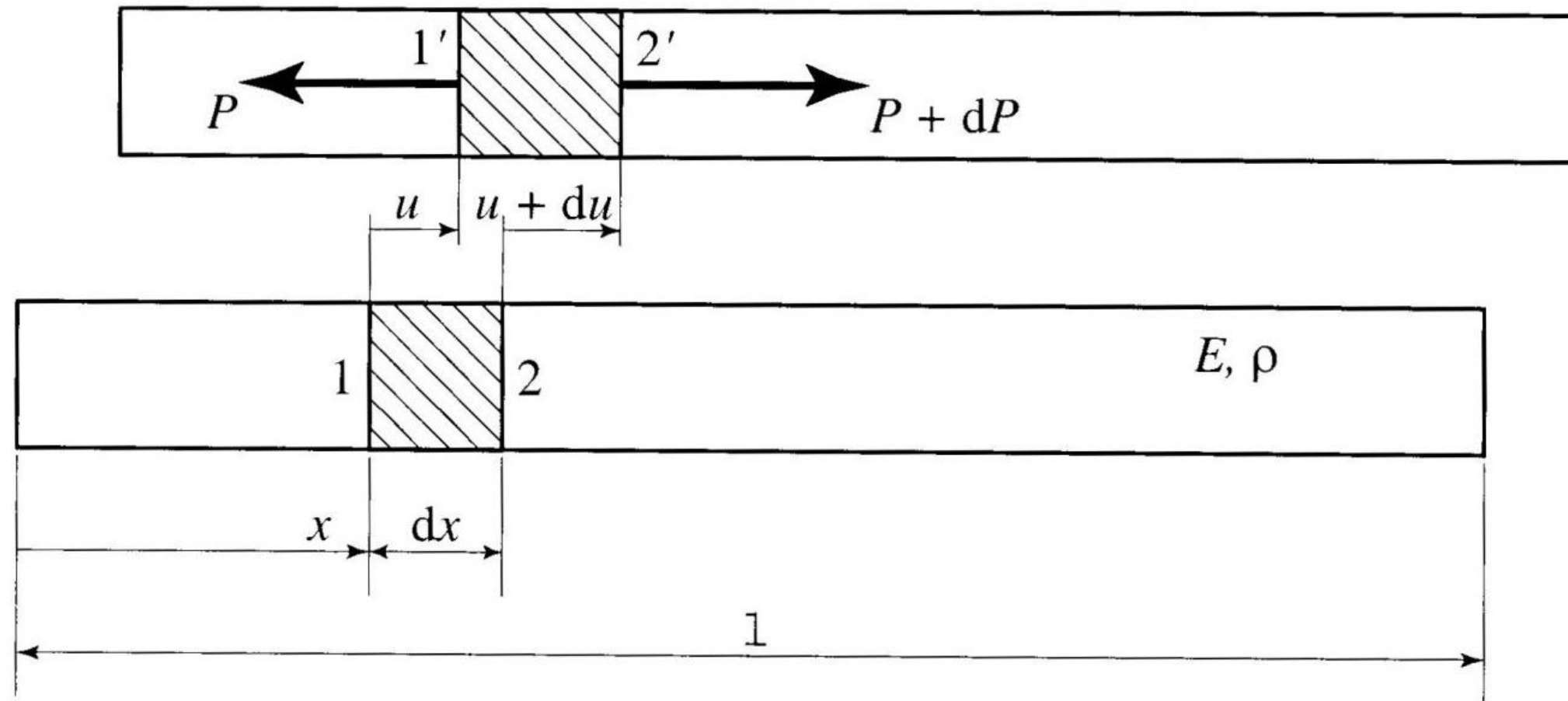
μ_1 masse par unité de longueur

Equation d'onde de *d'Alembert* relative aux vibrations latérales d'une corde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu_1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

EPFL II. Vibrations longitudinales des barres

Expression des *forces élastiques* P et $P+dP$ sur les faces d'un élément dm de barre en vibrations longitudinales



$$d \ll l$$

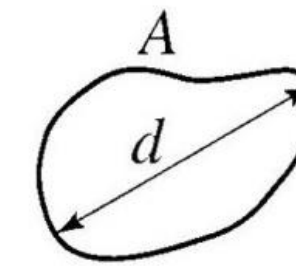
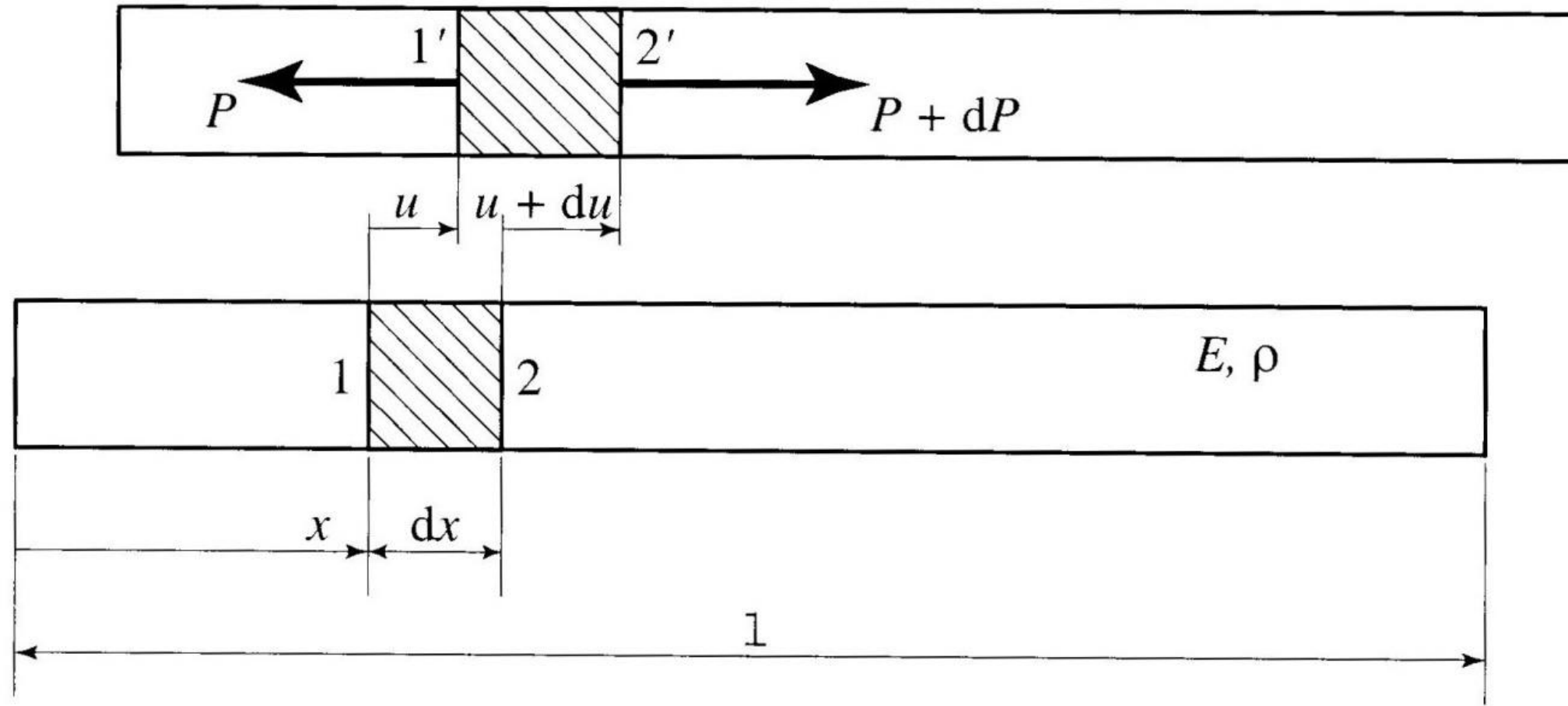
$$P = EA \varepsilon = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$P + dP = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right)$$

u déplacement axial
 E module d'élasticité
 A section

EPFL II. Vibrations longitudinales des barres

Ecriture de la *loi de Newton* – Equilibre des forces appliquées à un élément dm de barre



$$d \ll 1$$

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P + dP - P$$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Equation d'onde de *d'Alembert* relative aux vibrations longitudinales d'une barre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EPFL Résolution par séparation des variables

Recherche de solutions de l'équation de d'Alembert
par *séparation des variables*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$y(x, t) = V(x) \cdot U(t) \quad (15.20)$$

Ecriture de l'*équation de d'Alembert* en fonction
des nouvelles variables

$$\frac{\ddot{U}}{U} = a^2 \frac{V''}{V} \quad (15.21)$$

Résolution *indépendante* des deux membres de
l'équation de d'Alembert écrite en fonction des
nouvelles variables

$$\frac{\ddot{U}}{U} = a^2 \frac{V''}{V} = -\omega_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

EPFL Résolution par séparation des variables

Résolution du membre *temporel* de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{U} + \omega_n^2 U = 0$$

$$U_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (15.22)$$

Résolution du membre *spatial* de l'équation de d'Alembert

$$a^2 \frac{V''}{V} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad V'' + \frac{\omega_n^2}{a^2} V = 0$$

$$V_n(x) = C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x \quad (15.24)$$

avec

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad (15.23)$$

EPFL Résolution par séparation des variables

Solution particulière de l'équation d'onde de d'Alembert

$$y_n(x, t) = (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.25)$$

Solution générale de l'équation d'onde de d'Alembert – Somme des solutions particulières

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.26)$$

avec

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad (15.23)$$

EPFL Résolution par séparation des variables

Commentaires sur la solution générale de l'équation d'onde de d'Alembert

- les conditions initiales permettent de déterminer l'amplitude générale et la phase du mouvement en régime libre, mais sont peu utilisées en pratique;
- les conditions aux limites permettent de fixer les caractéristiques principales du comportement statique et dynamique du système;
- les conditions aux limites imposées à la solution dynamique doivent être homogènes, car la forme de cette solution s'annule périodiquement;
- la partie non homogène des conditions aux limites est satisfaite par une déformée statique que l'on superpose à la solution vibratoire;

EPFL I. Vibrations latérales des cordes

$$y_n(x, t) = (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.25)$$

Conditions aux limites d'une corde vibrante de longueur ℓ en régime libre

$$\begin{aligned} y(0, t) &\equiv 0 \\ \Rightarrow C_n \cos(0) + D_n \sin(0) &= 0 \\ \Rightarrow C_n &= 0 \\ y(\ell, t) &\equiv 0 \\ \Rightarrow D_n \sin \alpha_n \ell &= 0 \\ \Rightarrow \sin \alpha_n \ell &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_n \ell = n \pi &\Rightarrow \alpha_n = \frac{n \pi}{\ell} \end{aligned}$$

Extraction des *pulsations propres* de la corde vibrante

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \Rightarrow \omega_n = \alpha_n a \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

EPFL I. Vibrations latérales des cordes

$$y_n(x, t) = (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.25)$$

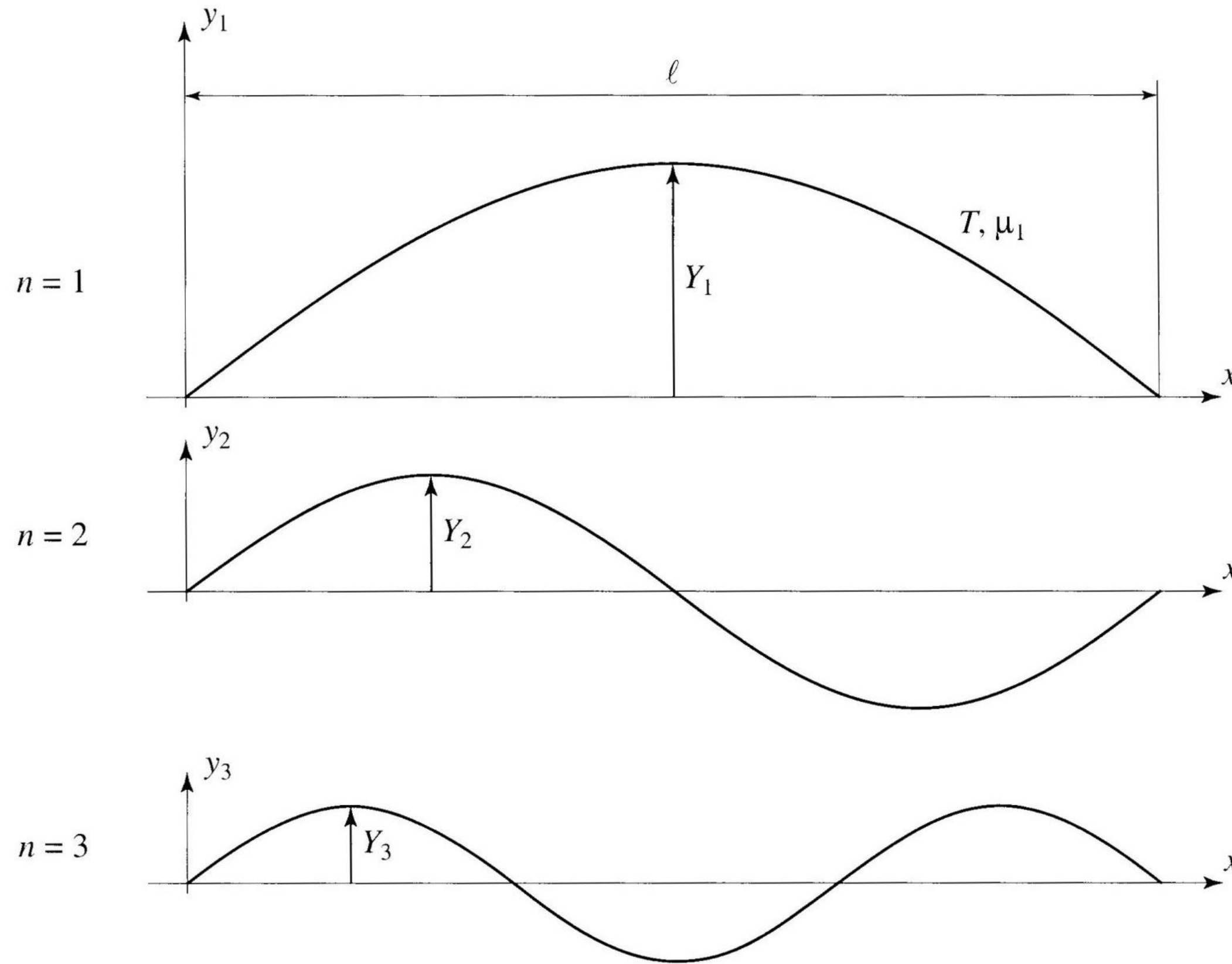
Pulsations *harmoniques* de la corde vibrante,
liées aux solutions harmoniques

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{n\pi}{\ell} \\ \omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Solution générale de l'équation d'onde relative à
la corde vibrante ($D_n = 1$)

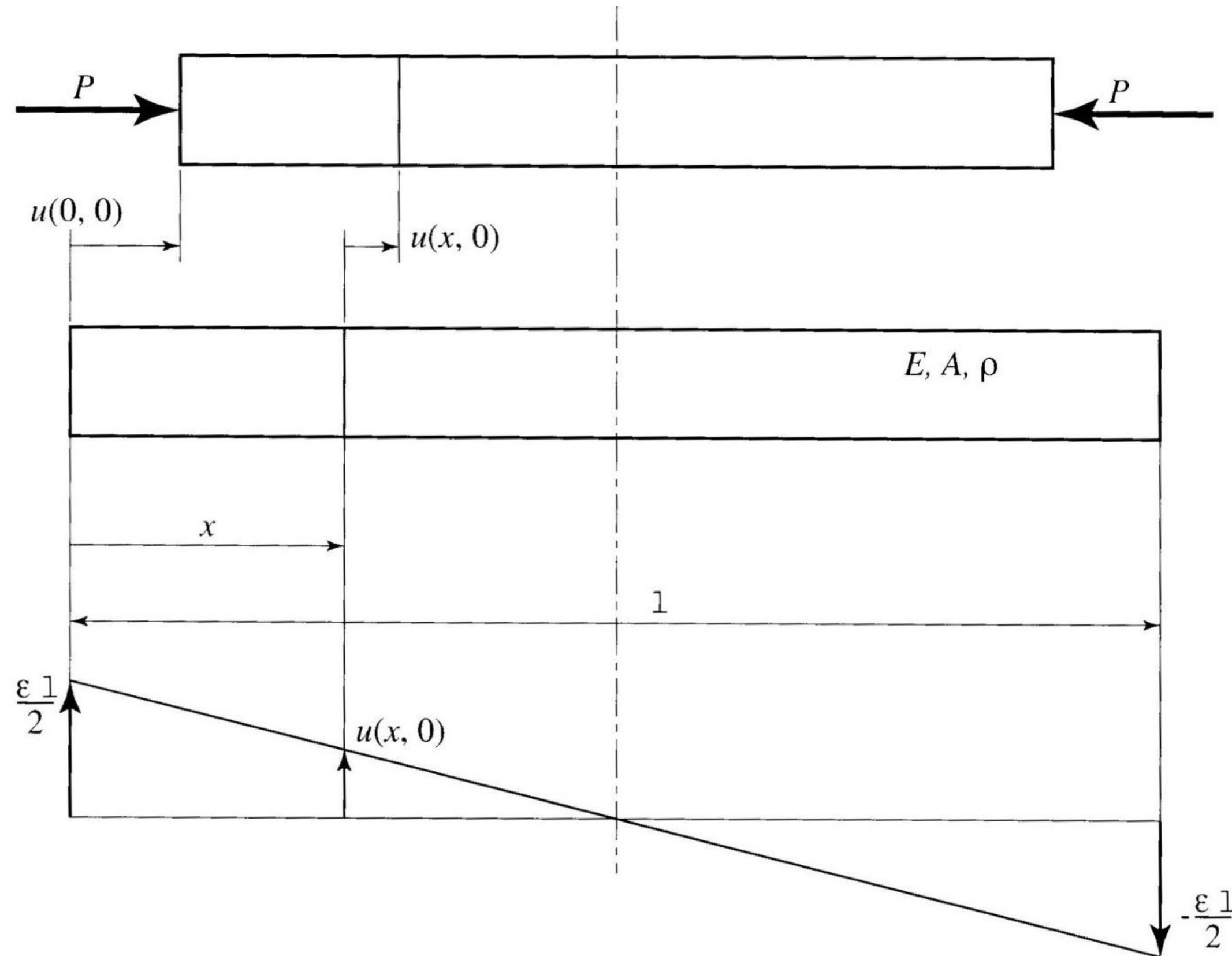
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin n \alpha_1 x \cdot \cos(n \omega_1 t - \varphi_n) \quad (15.30)$$

EPFL I. Vibrations latérales des cordes



$n = 1$	Fondamentale	$\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}$	$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$
$n = 2$	2ème harmonique	$\alpha_2 = 2\alpha_1$	$\omega_2 = 2\omega_1$
$n = 3$	3ème harmonique	$\alpha_3 = 3\alpha_1$	$\omega_3 = 3\omega_1$

EPFL II. Vibrations de barres à extrémités libres



Dérivation de la *déformation* d'une section de la barre

$$\begin{aligned}\epsilon(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(-C_n \sin \alpha_n x + D_n \cos \alpha_n x \right) \\ &\quad \cdot \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right)\end{aligned}$$

Conditions aux limites d'une barre libre en ses extrémités – Contrainte et allongement relatif nuls en $x = 0$ et $x = \ell$

$$\begin{aligned}\epsilon(0, t) &\equiv 0 &\Rightarrow D_n &= 0 \\ \epsilon(\ell, t) &\equiv 0 &\Rightarrow \alpha_n \ell &= n \pi \\ &&\Rightarrow \alpha_n &= \frac{n \pi}{\ell}\end{aligned}$$

EPFL II. Vibrations de barres à extrémités libres

Dérivation de la *déformation* d'une section de la barre

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(-C_n \sin \alpha_n x + D_n \cos \alpha_n x \right) \\ &\quad \cdot \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right)\end{aligned}$$

Conditions aux limites d'une barre libre en ses extrémités – Contrainte et allongement relatif nuls en $x = 0$ et $x = \ell$

$$\begin{aligned}\varepsilon(0, t) &\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D_n = 0 \\ \varepsilon(\ell, t) &\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \ell = n \pi \\ &\quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \frac{n \pi}{\ell}\end{aligned}$$

Extraction des *pulsations propres* de la barre libre-libre

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \alpha_n a$$

$$\text{avec } a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

EPFL II. Vibrations de barres à extrémités libres

Conditions aux limites d'une barre libre en ses extrémités – Contrainte et allongement relatif nuls en $x = 0$ et $x = \ell$

$$\begin{aligned}\varepsilon(0, t) \equiv 0 &\Rightarrow D_n = 0 \\ \varepsilon(\ell, t) \equiv 0 &\Rightarrow \alpha_n \ell = n \pi \\ &\Rightarrow \alpha_n = \frac{n \pi}{\ell}\end{aligned}$$

Extraction des *pulsations propres* de la barre libre-libre

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \Rightarrow \omega_n = \alpha_n a$$

$$\text{avec } a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

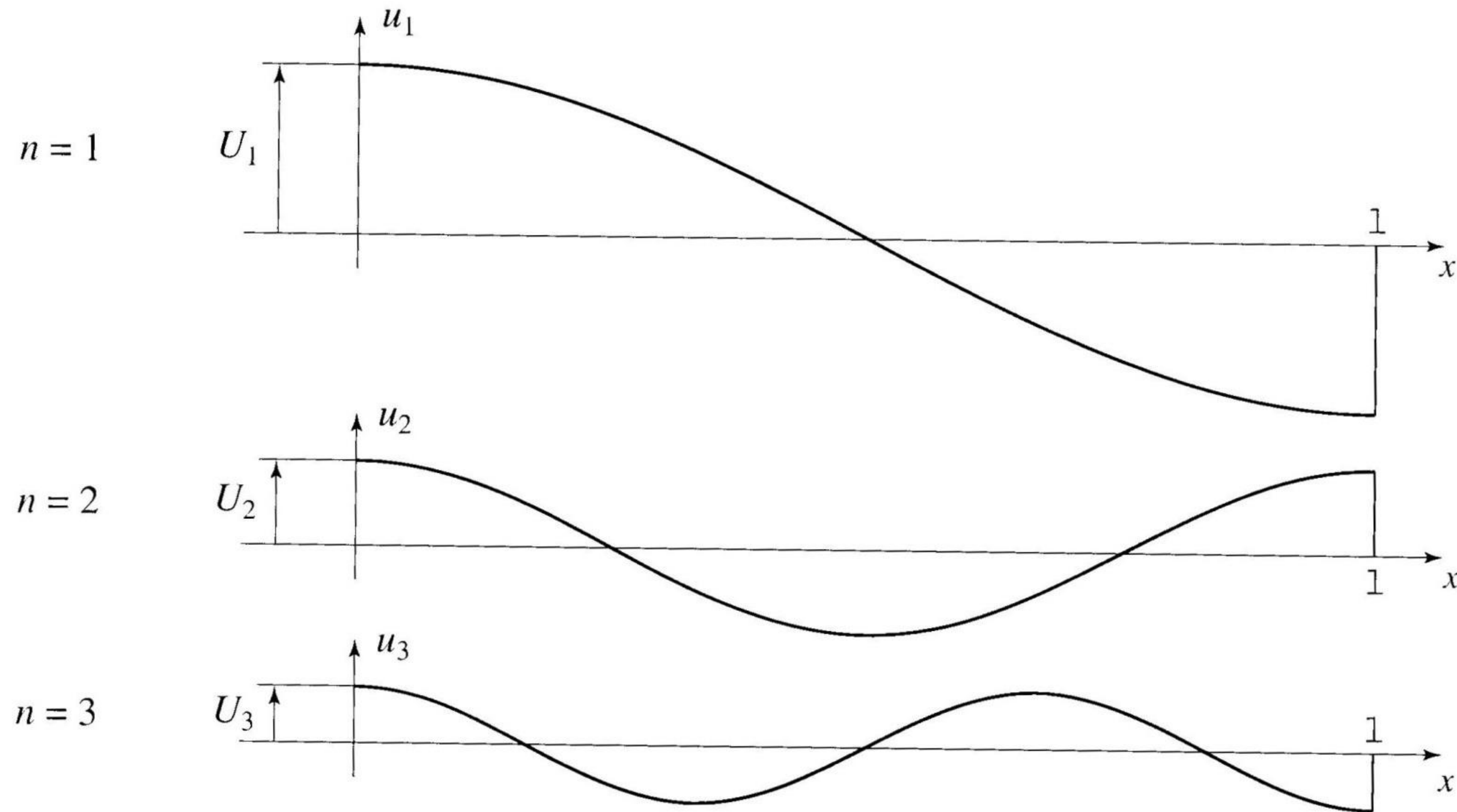
Solution générale de l'équation d'onde relative à la barre libre-libre ($C_n = 1$)

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \alpha_1 x \cdot (A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t) \quad (15.33)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos n \alpha_1 x \cdot \cos(n \omega_1 t - \varphi_n) \quad (15.34)$$

$u_n(x, t)$ mode propre de rang n
 $U_n \cos n \alpha_1 x$ forme propre de rang n

EPFL II. Vibrations de barres à extrémités libres

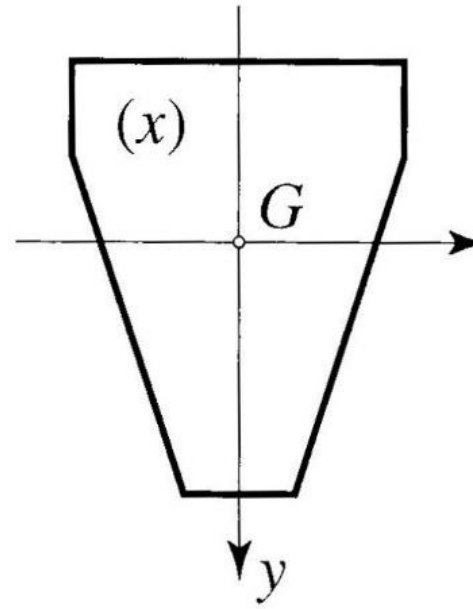
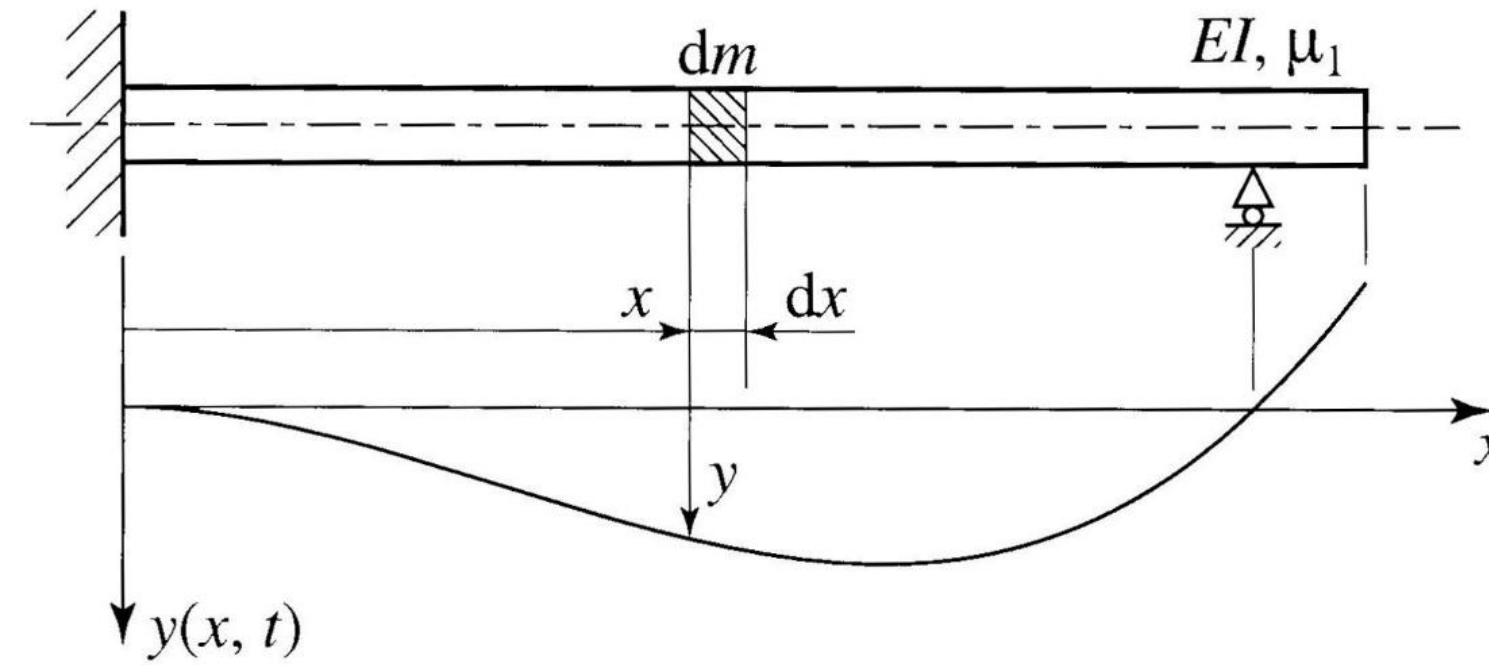


Chapitre 16: Systèmes Continus

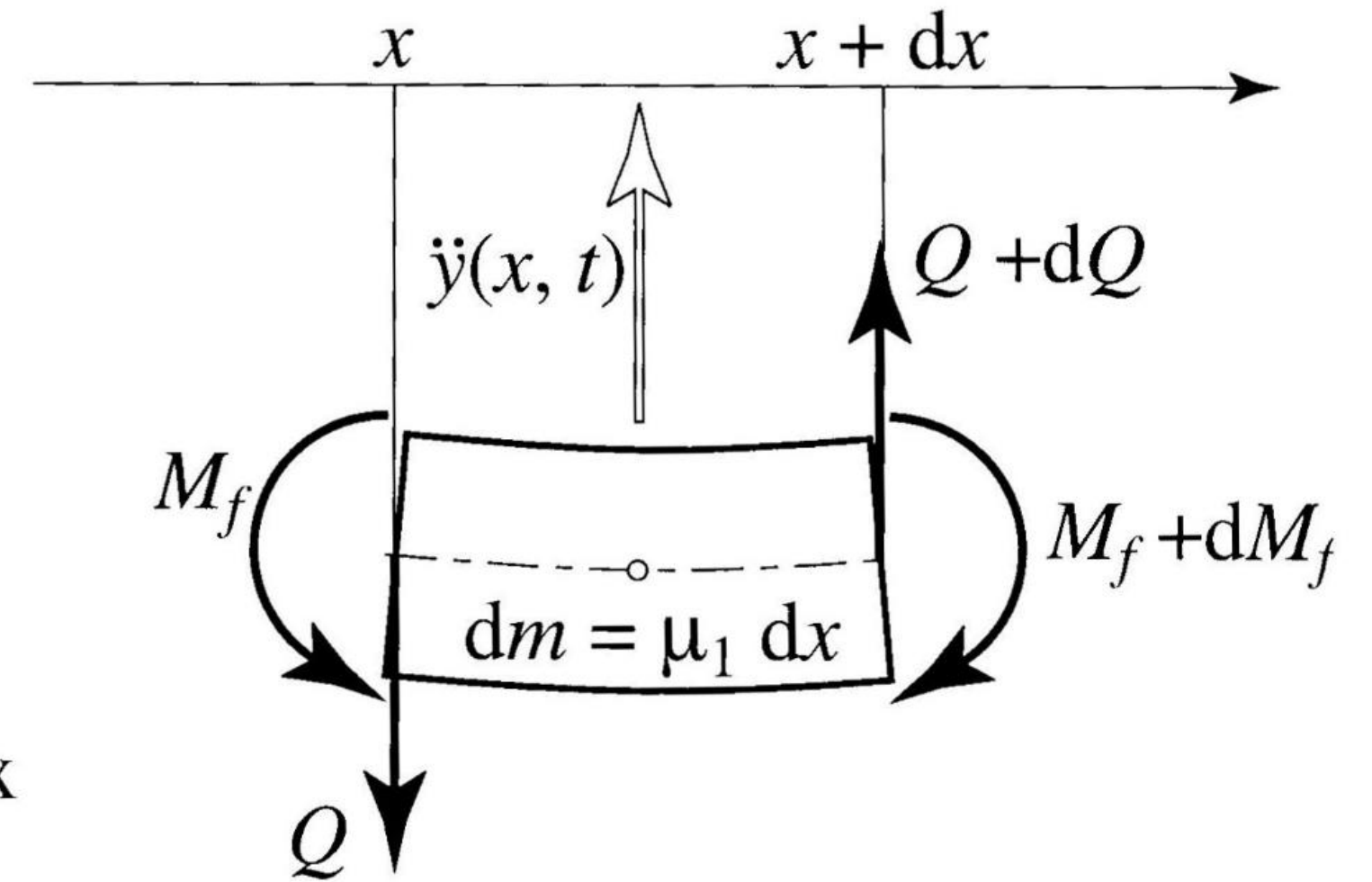
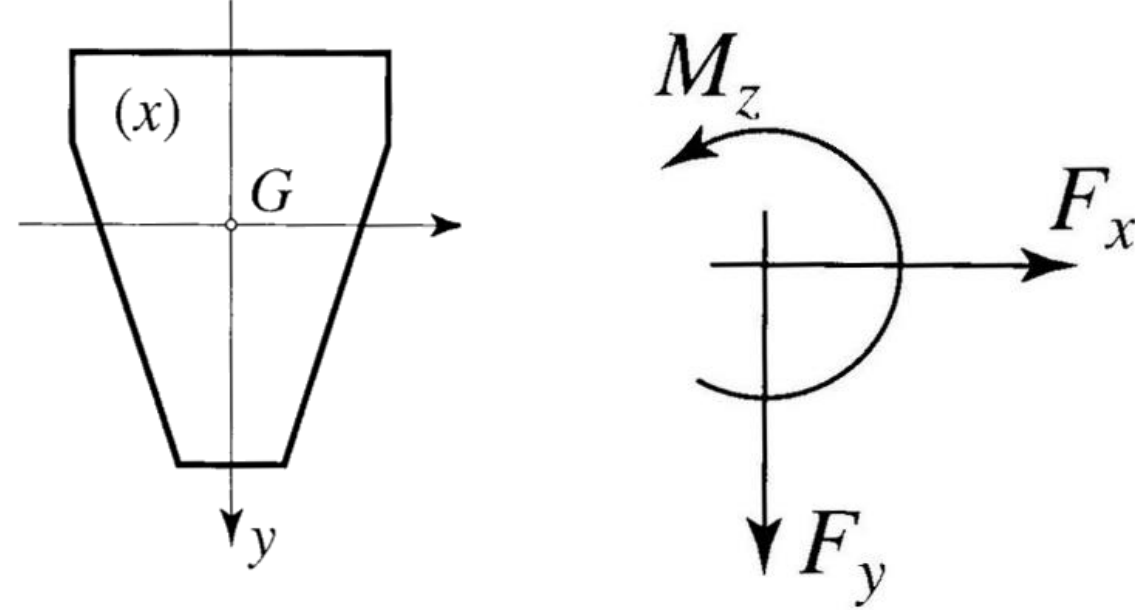
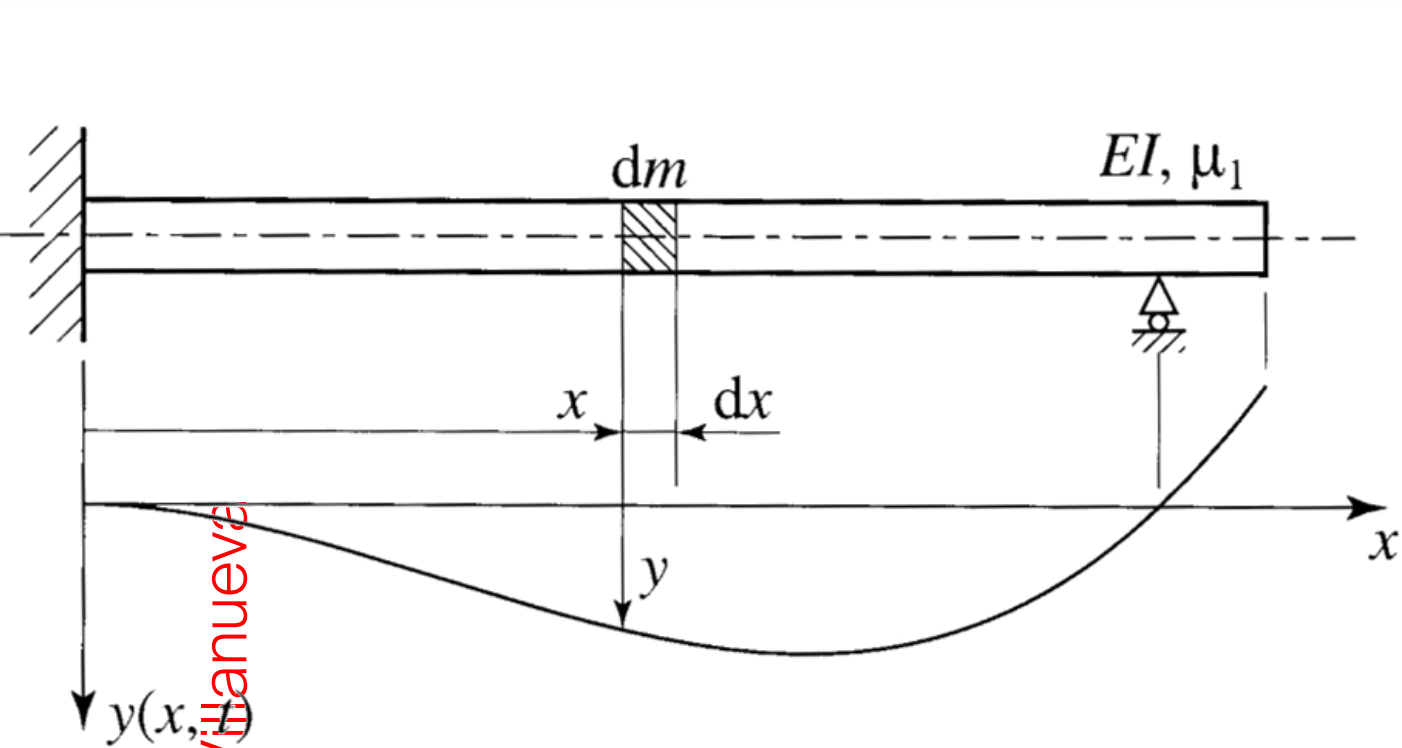
4^{ème} Ordre

Hypothèses adoptées pour l'étude des vibrations de flexion des poutres droites – Théorie de Bernoulli-Euler des poutres droites

- l'axe neutre x de la poutre est une droite;
- la poutre vibre latéralement dans le plan xy (vibrations coplanaires);
- les axes y et z sont principaux d'inertie;
- l'inertie de rotation des sections droites de la poutre est négligée;
- une section droite avant déformation reste droite après déformation (hypothèse de Bernoulli – effet du cisaillement négligé).



EPFL Poutres droites

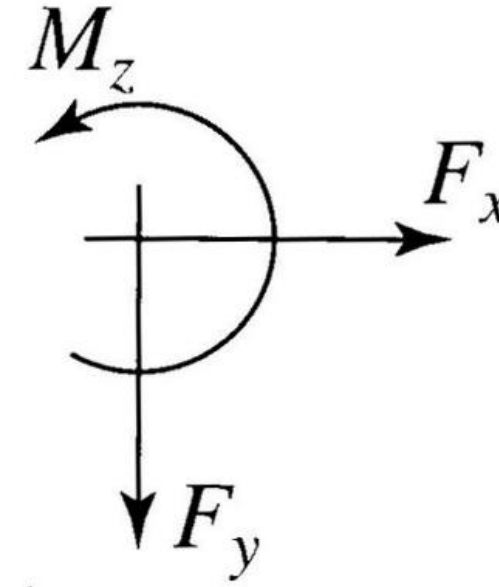


Expression des *efforts tranchants* Q et $Q+dQ$ aux extrémités d'un élément dm de poutre

$$Q = \frac{\partial M_f}{\partial x}$$

$$Q + dQ = \frac{\partial M_f}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} dx$$

M_f moment de flexion



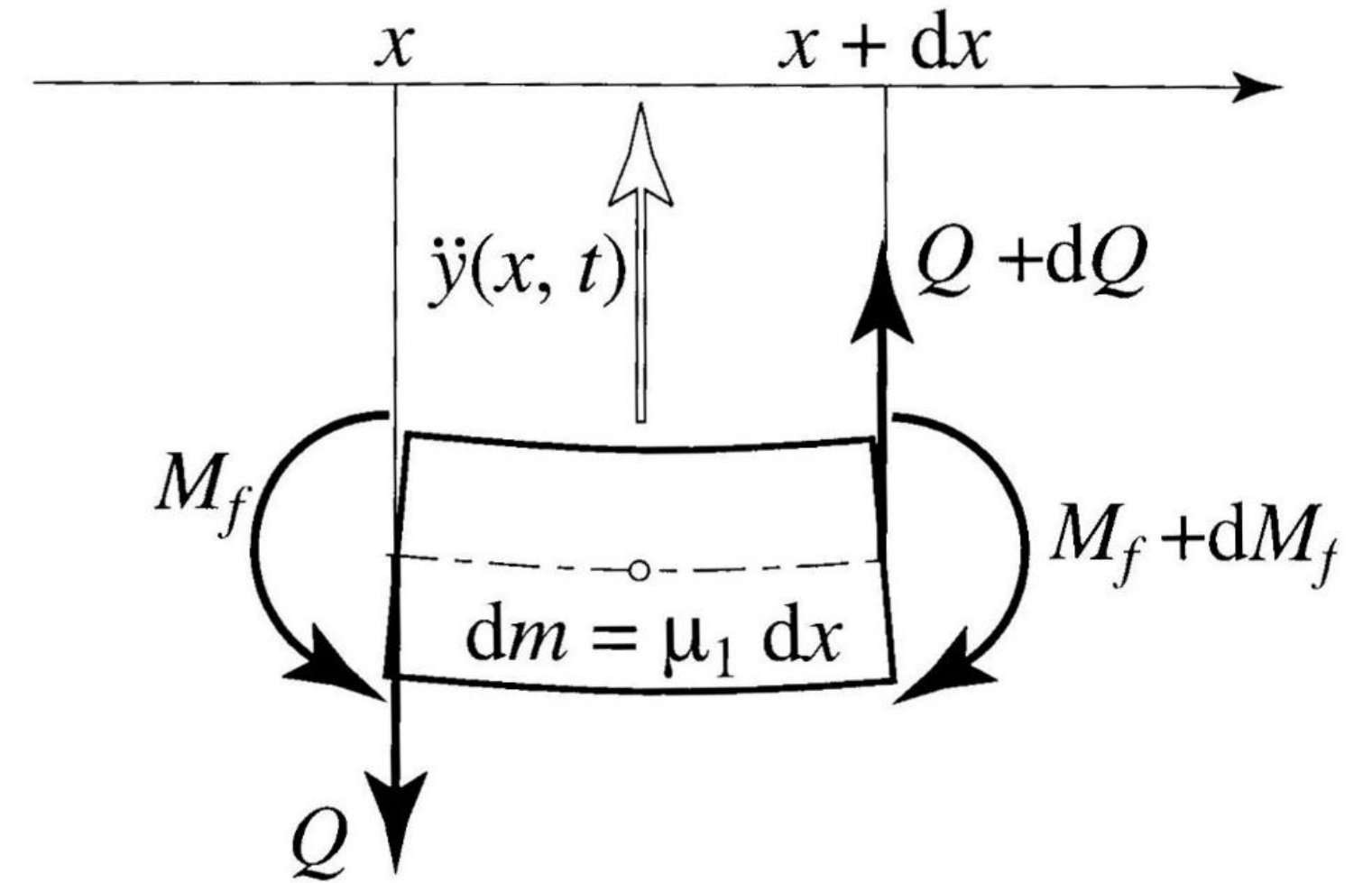
Ecriture de la *loi de Newton* – Equilibre d'un élément dm de poutre par projection des forces selon l'axe y (référentiel droit)

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(Q + dQ) + Q$$

$$\mu_1 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial M_f}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} dx \right) + \frac{\partial M_f}{\partial x}$$

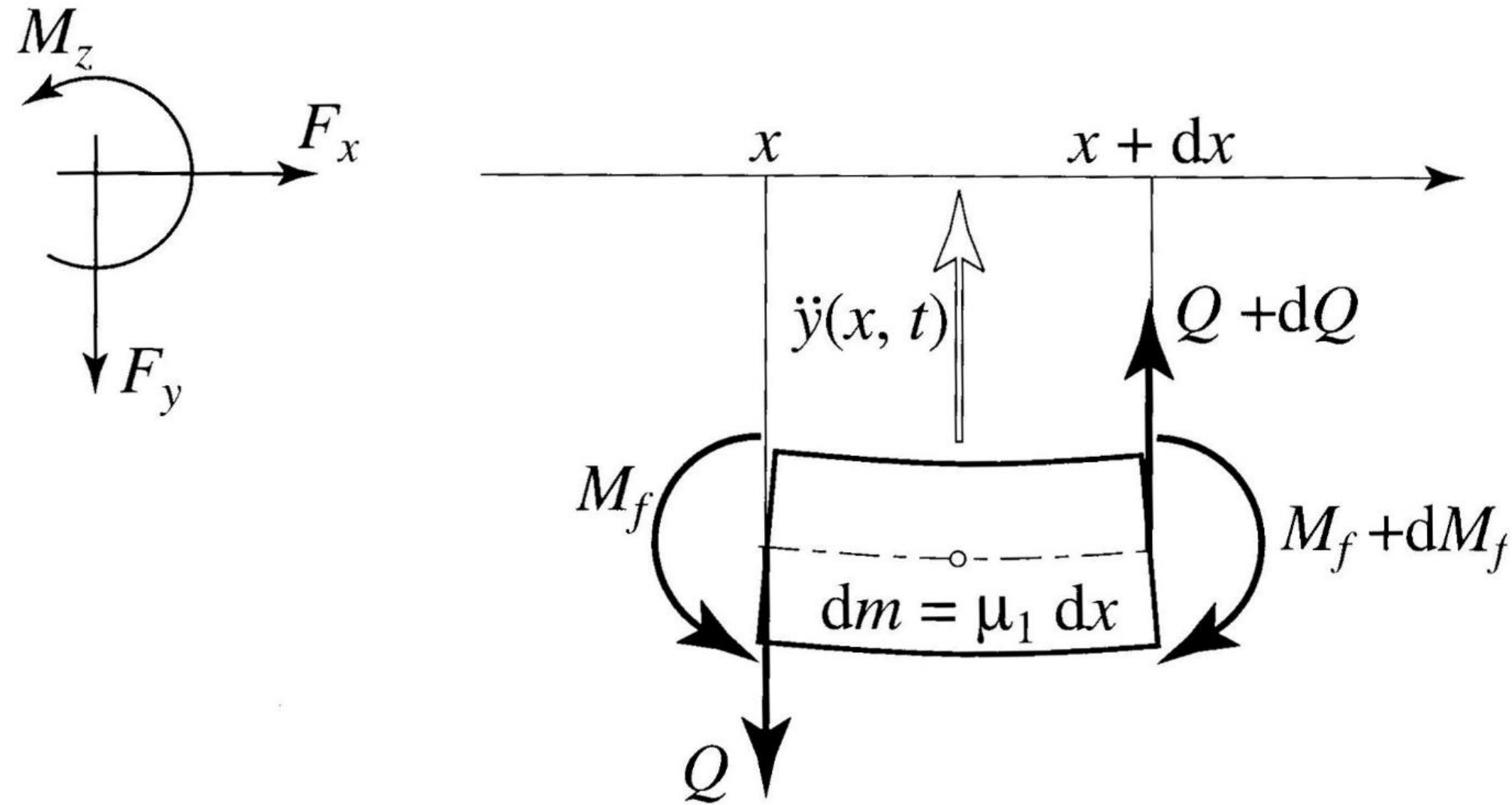
y déplacement transversal

μ_1 masse par unité de longueur



Equation différentielle relative aux vibrations de flexion d'une poutre

$$\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} \quad (16.1)$$



Lien entre le rayon de courbure ρ de la poutre et le moment de flexion M_f (référentiel droit)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_f}{EI}$$

E module d'élasticité

I moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z

Equation différentielle relative aux vibrations de flexion d'une poutre

$$\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} \quad (16.1)$$

Equation différentielle régissant les vibrations latérales d'une poutre de section constante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\mu_1} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (16.2)$$

EPFL Séparation de variables

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\mu_1} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (16.2)$$

$$y(x, t) = V(x) \cdot U(t) \quad (16.3)$$

Ecriture de l'équation différentielle en fonction des nouvelles variables

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\frac{EI}{\mu_1} \frac{V^{IV}}{V} \quad (16.4)$$

Résolution du membre *temporel* de l'équation différentielle

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{U} + \omega_n^2 U = 0$$

$$U_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (16.5)$$

EPFL Séparation de variables

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\mu_1} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (16.2)$$

$$y(x, t) = V(x) \cdot U(t) \quad (16.3)$$

Ecriture de l'équation différentielle en fonction des nouvelles variables

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\frac{EI}{\mu_1} \frac{V^{IV}}{V} \quad (16.4)$$

Résolution du membre *spatial* de l'équation différentielle

$$-\frac{EI}{\mu_1} \frac{V^{IV}}{V} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad V^{IV} - \omega_n^2 \frac{\mu_1}{EI} V = 0$$

$$V_n(x) = C_{n1} e^{\alpha_n x} + C_{n2} e^{-\alpha_n x} + C_{n3} \cos \alpha_n x + C_{n4} \sin \alpha_n x \quad (16.7)$$

avec

$$\alpha_n = \sqrt[4]{\omega_n^2 \frac{\mu_1}{EI}} \quad (16.6)$$

EPFL Séparation de variables

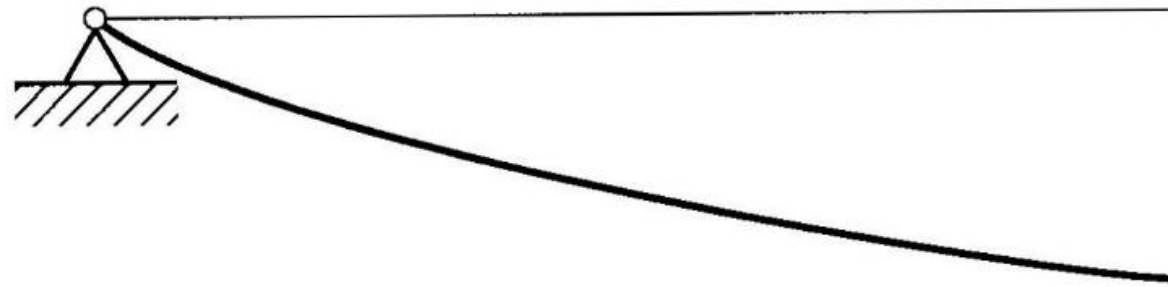
Solution générale de l'équation différentielle par
sommation des solutions particulières

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) \cdot \left(C_{n1} e^{\alpha_n x} + C_{n2} e^{-\alpha_n x} + C_{n3} \cos \alpha_n x + C_{n4} \sin \alpha_n x \right) \quad (16.8)$$

EPFL Conditions de Borde

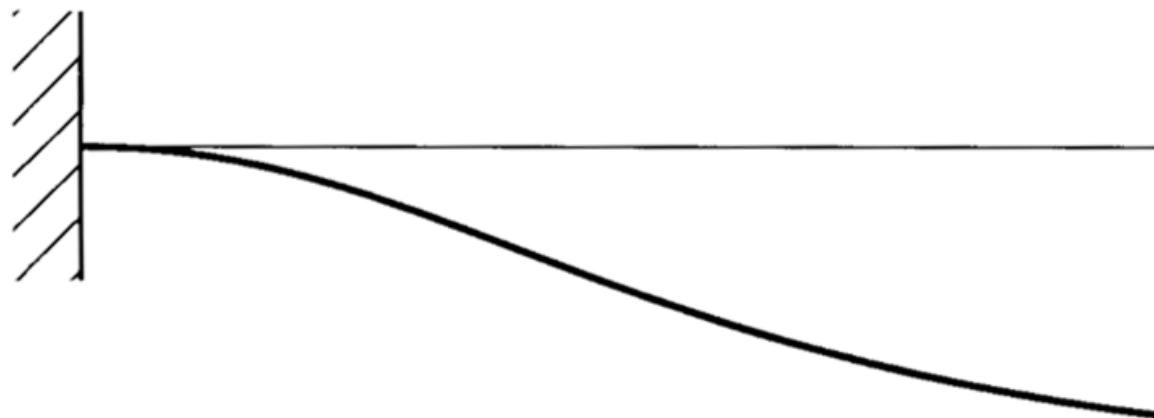
- appui simple

$$y = 0$$
$$M_f = 0 \Rightarrow y'' = 0$$



- encastrement parfait

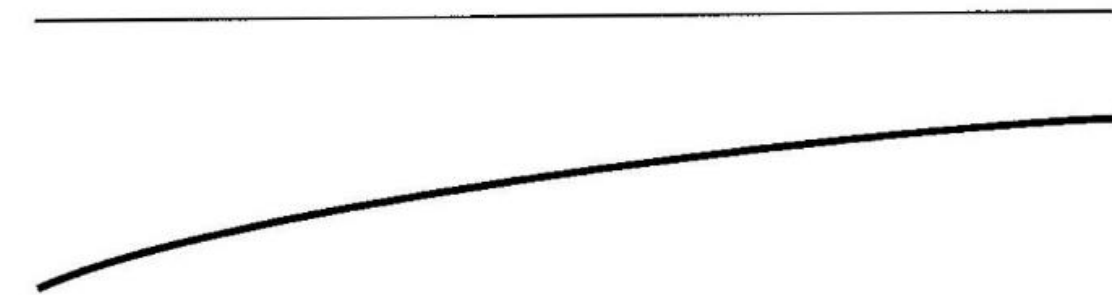
$$y = 0$$
$$y' = 0$$



- extrémité libre

$$M_f = 0 \Rightarrow y'' = 0$$

$$Q = 0 \Rightarrow y''' = 0$$



- encastrement partiel élastique

$$y = 0$$
$$M = -k y' \Rightarrow y'' = \frac{k}{EI} y'$$

